
Actes de la troisième Conférence internationale sur la Francophonie économique

VERS UNE ÉCONOMIE RÉSILIENTE, VERTE ET INCLUSIVE

Université Cheikh Anta Diop de Dakar – Sénégal, 16 – 18 mars 2022

**EXPOSANT DE HURST CLASSIQUE VS HURST DYNAMIQUE : UNE ETUDE DE
L'IMPACT DES CRISES SUBPRIMES ET COVID-19 SUR L'EFFICIENCE DES BOURSES
AFRICAINES**

OUMOU KALSOU M DIALLO

Doctorante Université Gaston Berger de Saint-Louis, Sénégal, membre du Laboratoire
Mathématique de la Décision et de l'Analyse Numérique (LMDAN)

diallo.oumoul-kalsoum@ugb.edu.sn

PIERRE MENDY

Maitre de conférences FASEG, Université Cheikh Anta Diop, Dakar, Sénégal,
membre du LMDAN

pierre.mendy@ucad.edu.sn

RÉSUMÉ – Aujourd'hui la bourse joue un rôle essentiel dans les économies modernes. Elle permet de drainer l'épargne vers les investissements les plus rentables, ce qui suppose que le marché fonctionne de façon efficiente. Toutefois, nous avons assisté à une succession de crises ou krachs boursiers. À cela s'ajoute les diverses anomalies sur les marchés financiers. Toutes ces observations constituent autant de facteurs qui remettent en cause la théorie d'efficience. Dès lors, la question de l'efficience des marchés financiers refait surface et relance le débat. À côté, la sphère financière africaine n'a cessé de se développer ces dernières décennies, elle prend de plus en plus d'importance. À ce titre étudier le comportement de ces bourses semble donc nécessaire. Ainsi, nous ferons une étude comparative en testant l'efficience de ces bourses d'abord avec l'exposant de Hurst classique. Cet outil permet de caractériser la structure du marché, mais peut également être interprété comme une mesure du degré d'imperfection ou d'inefficience du marché ; il sera estimé par l'approche des ondelettes. Étant donné que les marchés financiers sont souvent confrontés à des périodes de crises qui entraînent leur instabilité, il serait intéressant d'analyser leurs comportements lors de tels événements. Ainsi, nous étudierons l'impact de la crise des subprimes et de la covid-19 sur ces marchés financiers africains. Cette analyse se fera au moyen de l'exposant de Hurst dynamique qui permet de prendre en compte l'efficience de marché variant dans le temps. Les résultats peuvent être résumés comme suit : d'abord l'indice de Hurst $H(q)$ met en évidence le caractère multifractal des bourses africaines et le rejet de l'hypothèse nulle d'absence de mémoire pour toutes les séries de rentabilités. Les résultats montrent également que les deux crises ont différemment impacté ces marchés, la contagion est plus

2 • Actes de la troisième Conférence internationale sur la Francophonie économique

rapide pour la covid-19 que pour les subprimes. Ils révèlent aussi que pendant les périodes de crises l'essentiel des bourses africaines alterne entre des périodes d'efficience et d'inefficience.

Mots-clés : Hypothèse d'efficience des marchés, Ondelettes, exposant de Hurst, Hurst dynamique

Les idées et opinions exprimées dans ce texte n'engagent que leur(s) auteur(s) et ne représentent pas nécessairement celles de l'OFE ou de ses partenaires. Aussi, les erreurs et lacunes subsistantes de même que les omissions relèvent de la seule responsabilité de ou des auteurs.

1. Introduction

Les marchés financiers constituent aujourd'hui des sources de financement pour l'économie moderne. La bourse constitue donc un instrument de financement essentiellement tourné vers le long terme. Elle permet de mobiliser des capitaux à long terme auprès des investisseurs institutionnels et particuliers afin de les rediriger vers les États et les entreprises pour le financement de leurs activités et projets d'investissement. Pour bien jouer leurs rôles ces marchés nécessitent un fonctionnement de façon efficiente. Dès lors que cette efficacité est réelle, le prix du titre est une bonne estimation de la valeur que lui confère le marché. De nombreuses études théoriques et empiriques qui ont analysé le comportement du cours de l'actif révèlent que celui-ci n'est pas seulement une valeur observée à l'heure actuelle, mais qu'il contient toutes les informations disponibles sur le marché. Ce concept fait référence à l'hypothèse d'efficacité informationnelle des marchés financiers qui fonde l'essentiel des travaux orthodoxes dans le domaine de la finance.

Selon [14] un marché est considéré comme efficient, lorsque les prix des titres reflètent pleinement toutes les informations disponibles. Les prix sur le marché incorporent instantanément les conséquences des événements passés d'une part, mais reflètent aussi les anticipations des événements futurs d'autre part. Alors toute prévision dégage un profit nul [26], conditionnellement à l'ensemble d'information disponible, il est impossible de réaliser des profits anormaux. Cette théorie d'efficacité a occupé le domaine de la recherche en finance pendant toutes ces décennies et constitue l'une des théories les plus controversées dans le domaine économique ou financier. De nombreuses études empiriques ont conclu à l'efficacité ou non de différents marchés boursiers selon qu'on est oui ou non partisan de l'efficacité. Pour un grand nombre d'auteurs [14], [26] l'hypothèse d'efficacité reste et demeure solide. Pour d'autres tels que [55], [2], [27], [5] cette hypothèse est contestable; ils produisent des résultats non conformes à l'efficacité des marchés (notamment avec l'existence d'anomalies dans le système financier, la fréquence actuelle des crises financiers ...).

En plus de ces nombreux facteurs qui constituent autant d'éléments remettant en cause l'hypothèse d'efficacité des marchés, il existe une nouvelle problématique liée aux méthodes utilisées. En, effet, l'efficacité des marchés a depuis longtemps été analysée avec les tests de prévisibilité et récemment avec l'approche basée sur l'exposant de Hurst. La plupart des auteurs ont proposé des approches d'estimation de l'exposant de Hurst statique or, il existe des cas où celui-ci varie dans le temps. En effet, les faits stylisés ont montré que le monde financier fait face très souvent à des périodes de crises qui font que le système financier mondial est intrinsèquement instable. Il est caractérisé par des périodes calmes (absence de crises) et des périodes plus perturbées dont les conséquences conduisent à une fluctuation des cours boursiers dans un continuum d'équilibre et de déséquilibre. Ainsi, analyser l'efficacité des marchés à travers des méthodes prenant en compte de tels phénomènes semble donc pertinent.

Les principales contributions de ce travail se situent à différents niveaux. D'abord, une première contribution réside dans la particularité de la méthodologie à savoir l'exposant de Hurst qui est un outil permettant à la fois de tester l'efficacité du marché et détermine la structure fractale du marché. Une autre contribution majeure est l'utilisation du Hurst dynamique qui permet de tenir compte de l'évolution de l'efficacité du marché sur une période considérée. Autrement dit, elle permet de modéliser

l'efficience non statique, mais celle variant dans le temps.

Le reste du document sera organisé comme suit. La section 2 passe en revue la littérature existante. La section 3 présente la méthodologie utilisée. La section 4 examine les données et les résultats obtenus. La section 5 présente les conclusions.

2. Revue de la littérature

L'hypothèse d'efficience a très souvent été associée à la marche aléatoire. Donc les tests d'efficience faible sont principalement des tests de marche aléatoire dont l'objet est de déterminer s'il est possible de prévoir les rentabilités futures. Depuis les années 50, la plupart des études dans le cadre financier portaient sur des horizons courts. Des auteurs comme [28] ont conclu à l'absence de tendance dans l'évolution des rendements selon lui la mémoire d'un marché est au plus d'une semaine. [46] abouti aux mêmes conclusions à savoir l'absence notable de tendance dans la prévision des rendements ; les changements de prix se font de manière aléatoire d'où l'impossibilité de prévoir les prix futurs. Une grande partie des études [53; 54] mettent également en évidence la présence d'auto-corrélation significatives différentes de 0 dans les rentabilités à court terme. [56] dans son analyse abouti quant à lui aux conclusions suivantes, il constate l'absence d'auto-corrélation à court terme alors même qu'elle existe. [51] ont utilisé le même test sur les rendements mensuels des indices du NYSE de la base de données du CRSP (1926-1985) des États-Unis et pour dix-sept autres pays. Leurs résultats impliquent une auto-corrélation positive des rendements sur des horizons courts et une autocorrélation négative sur des horizons plus longs, bien que le comportement aléatoire des cours ne puisse pas être rejeté. En utilisant des données hebdomadaires, [11] aboutissent aux mêmes conclusions. Ces résultats sont similaires à ceux de [15] qui ont étudié l'autocorrélation des rentabilités des titres cotés sur le NYSE (entre 1926-1985). Les résultats font apparaître une autocorrélation négative assez forte et statistiquement significative au seuil de 5% à long terme.

Pour des auteurs comme [14], [26] et [33], il est important de signaler que même si les auto-corrélations entre des rendements sont significatives du point de vue statistique, elles ne le sont pas d'un point de vue économique dans le sens où il est impossible d'exploiter ces auto-corrélations pour établir des règles de spéculation conduisant à des profits anormaux. Autrement dit, les rentabilités peuvent être faiblement dépendantes, mais il est impossible de spéculer sur cette dépendance pour générer des profits anormaux. Et cette présence d'auto-corrélation à court terme ne remet pas en cause l'hypothèse d'efficience des marchés. À partir de là, on voit apparaître des contradictions qui nécessitent de grandes réflexions. Ainsi, plusieurs études ont été élaborées pour pallier les limites de ces premières modélisations. Dès lors il semble nécessaire que la meilleure façon d'appréhender cette auto-corrélation serait de travailler sur des horizons plus longs.

Des études ont montré que les séries temporelles présentent une dépendance de long terme, il s'agit notamment des phénomènes de mémoires longues. Ce même phénomène également connu sous le nom d'effet Joseph selon [39] a été observé dans plusieurs domaines tels que l'hydrologie, la météorologie, l'économie, la finance, etc. [35] fût le premier à déceler cette remarque, en finance à partir de son étude sur le prix du coton, ce qui a ensuite été observé sur différents autres marchés. Les développements

récents conduisent aujourd'hui à l'utilisation de nouvelles approches dans l'analyse de l'efficience du marché, il s'agit notamment de l'approche basée sur l'exposant de Hurst. L'avantage de cet outil est qu'en plus de caractériser la nature de la mémoire longue des séries en analysant la structure fractale du marché, l'exposant de Hurst peut aussi s'interpréter comme une mesure du degré d'imperfection ou d'inefficience du marché.

Plusieurs études ont utilisé l'exposant de Hurst pour étudier l'efficience du marché. [30] a étudié les entreprises familiales de la bourse du Maroc. Les résultats montrent le caractère multifractal du marché, les fluctuations courtes (longues) des rendements des actions des entreprises familiales sont moins (plus) persistantes (anti-persistantes) que les fluctuations courtes des indices de marché. [29] ont étudié l'efficience du marché du bitcoin par rapport aux marchés de l'or, des actions et des changes. Ils ont constaté que la fonctionnalité de mémoire longue et la multifractalité du marché du Bitcoin étaient plus fortes et que le Bitcoin était donc plus inefficent que les marchés de l'or, des actions et des devises. [12] et [13] dans leurs études concluent à la nature multifractale de la Bourse Régionale des Valeurs Mobilières et à l'existence d'une mémoire dans l'évolution des rendements de ce marché (processus tantôt persistant tantôt anti-persistant).

3. Méthodologie

Les développements récents conduisent aujourd'hui à l'utilisation de nouvelles approches dans l'analyse de l'efficience du marché, il s'agit notamment de l'approche basée sur l'exposant de Hurst. L'origine de l'exposant de Hurst remonte à 1951 avec les travaux de l'hydrologue anglais Edwin Hurst. [23] propose une méthode pour optimiser la capacité de stockage d'un réservoir destiné à réguler les apports naturels du Nil, en tenant compte des tendances cycliques du débit, des périodes de sécheresse et par extension des crues. Sa méthodologie repose sur l'idée que de nombreux phénomènes naturels présentent un comportement qui peut être caractérisé par un processus aléatoire biaisé, dans lequel il existe une mémoire entre les observations, c'est-à-dire que les événements d'une période influencent tous les suivants. Il fût donc le premier à montrer que les séries temporelles présentent une dépendance de long terme. Ce même phénomène également connu sous le nom d'effet Joseph selon [39] a été observé dans d'autres domaines tels que la météorologie, l'économie, la finance, etc. [35] fût le premier à déceler cette remarque, en finance à partir de son étude sur le prix du coton, ce qui a ensuite été observé sur différents autres marchés. Et ce fait sera encore beaucoup plus flagrant si l'on considère les rendements sur de petits intervalles de temps (avec les données à haute fréquence). [49] et [32], ont montré que statistiquement, c'était une erreur de considérer que le rendement suit une marche aléatoire, surtout qu'avec l'hypothèse d'efficience au sens faible l'objectif est généralement de vérifier le comportement aléatoire dans la distribution des cours. L'approche des séries financières avec des mouvements browniens ordinaires semble n'être donc pas adaptée. Dès lors, il semblait nécessaire de recourir à des processus qui permettent de modéliser la dynamique de long terme.

Le premier processus à mémoire longue est le mouvement brownien fractionnaire développé par [38]. Les séries empiriques étant des processus en temps discret, [40; 41; 42] ont utilisé le bruit gaussien fractionnaire. Une classe de modèle liée au bruit gaussien fractionnaire est constituée des processus ARFIMA (Auto Regressive Fractionnaly Integrated Moving Average) encore appelé FARIMA (0,d,0) qui

sont une généralisation des processus ARIMA (p, d, q) standards. Ces processus introduits et développés par [18] et [22] sont aujourd'hui très présents en économie particulièrement en finance. [31] a étudié les implications des processus à mémoire longue dans la théorie financière. [43] a relié l'impact de ce comportement et l'efficacité des marchés. En effet, comme définit par [14] l'hypothèse d'efficacité informationnelle des marchés financiers stipule que les cours des actifs reflètent pleinement toute l'information disponible, ce qui signifie une impossibilité de prévoir les rentabilités futures à partir des rentabilités passées. A cet effet, si les rentabilités ont une structure de dépendance à long terme, alors les observations présentent des auto-corrélations significatives, la connaissance du passé fournit alors de l'information pour prévoir les valeurs futures. Ainsi, en plus de caractériser la nature de la mémoire longue des séries en analysant la structure fractale du marché, l'exposant de Hurst peut également s'interpréter comme une mesure du degré d'imperfection ou d'inefficacité du marché.

Dans la littérature plusieurs approches ont été proposées pour estimer l'exposant de Hurst, mais dans le cadre de ce travail, nous utilisons l'approche des ondelettes.

3.0.1. Coefficients d'ondelettes

[1] ont introduit la méthode basée sur la décomposition en ondelettes discrètes, plus précisément sur la régression linéaire de la variance des coefficients d'ondelettes, avec le choix de l'ondelette de Daubechies. Ils ont prouvé que cet estimateur est asymptotiquement sans biais avec une variance minimale ainsi que la tendance polynomiale dans les séries temporelles qui est sans effet sur l'estimation de l'exposant de Hurst car l'ondelette mère choisie présente un nombre convenable de moments nuls.

Définition : soit ψ une fonction de $L_2(\mathbb{R})$ oscillante de moyenne nulle et à support finie

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(t) dt = 0 \tag{1}$$

Cette fonction doit obéir à certaines règles.

i) condition d'admissibilité donnée par :

$$C_\psi = \int_0^\infty |\Psi(f)| df < \infty \tag{2}$$

Où $\Psi(f)$ représente la transformée de Fourier, fonction de la fréquence f de $\psi(t)$. Cette condition d'admissibilité assure la convergence rapide $\Psi(f)$ tend vers 0 lorsque $f \rightarrow 0$ (cf. [19] et [34]). Pour garantir que $C_\psi < \infty$, il faudra imposer que $\Psi(0) = 0$ ce qui équivaut à l'équation 1.

ii) condition de régularité : l'ondelette mère ψ vérifie la propriété que les moments d'ordre N sont nuls si est seulement si :

$$\int_{\mathbb{R}} t^k \psi(t) dt \equiv 0 \quad \forall k = 0, \dots, N - 1 \tag{3}$$

Pour analyser certaines données temporelles la DWT devient plus intéressante que la CWT. D'une part ces données sont généralement intrinsèquement discrètes, d'autre part la DWT est considérablement plus facile à implémenter (elle utilise moins de coefficients que la CWT). Les coefficients de la DWT sont habituellement, échantillonnés de CWT sur une grille dyadique. Un échantillonnage critique de la CWT est obtenu par : $s = 2^{-j}$ et $u = 2^{-j}k$. Où j et k sont des nombres entiers représentant respectivement les paramètres de translations et dilatations discrètes (cf. [57]). Un échantillonnage critique définit la résolution de la DWT en temps et en fréquence. Le terme échantillonnage critique est utilisé pour désigner le nombre minimum de coefficients échantillonnés de la CWT pour s'assurer que toutes les informations présentes dans la fonction d'origine soient conservées par les coefficients d'ondelettes. La CWT prend des valeurs à chaque point sur le plan temps/fréquence alors que la DWT, quant à elle ne prend des valeurs que sur très peu de points.

Les fonctions $\psi_{j,k}$ sont obtenues de la fonction mère ψ par une normalisation, une dilatation ainsi qu'une translation. La collection $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ forme une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$.

$$\psi_{jk} \equiv 2^{j/2} \psi(2^j t - k), \text{ où } j, k \in \mathbb{Z}; \text{ une base orthonormale } \in L^2(\mathbb{R}) \quad (4)$$

Le facteur d'échelle $2^{j/2}$ assure que $\|\psi_{j,k}\| = \|\psi\| = 1$. Ces types d'ondelettes sont appelés ondelettes dyadiques, car le facteur d'échelle est une puissance de 2. La DWT de X est définie par ses coefficients obtenus comme suit :

$$d_X(j, k) = \int_{\mathbb{R}} X(t) \psi_{j,k}(t) dt \quad \text{où} \quad \psi_{j,k}(t) = 2^{-j} \psi_0(2^{-j}t - k) \quad (5)$$

3.0.2. Coefficients dominants

[24] ont proposé d'utiliser les wavelets leaders. En effet, les DWT prennent souvent des valeurs proches de 0 et ne peuvent être élevées à des puissances négatives. Dans ce cas, les fonctions de structure correspondantes $S(j, q)$ deviennent instables [9]. Pour pallier cet inconvénient, des auteurs proposent l'utilisation des wavelet leaders (WL) pour une meilleure performance de l'estimation [25] et [13]. Supposons maintenant que $\psi_0(t)$ a un support de temps compact et définissons les intervalles dyadiques comme étant :

$$\lambda \equiv \lambda_{j,k} = [k2^j, (k+1)2^j]. \quad (6)$$

Si, nous notons 3λ l'union de l'intervalle λ avec ses deux intervalles dyadiques adjacents tel que :

$$3\lambda_{(j,k)} = \lambda_{(j,k-1)} \cup \lambda_{(j,k)} \cup \lambda_{(j,k+1)} \quad (7)$$

Selon [24], les coefficients des wavelets leaders sont définis comme suit :

$$L_X(j, k) \equiv L_\lambda = \sup_{\lambda' \subset 3\lambda_{(j,k)}} |d_{\lambda'}| \quad (8)$$

$L_X(j, k)$ est alors constitué par les supremums des coefficients de $d_X(j', k')$ calculés à toutes les échelles les plus fines $2^{j'} \leq 2^j$ dans un voisinage temporel restreint $(k-1)2^j \leq 2^{j'} k' < (k+1)2^j$

3.0.3. Coefficient de Hurst variant dans le temps

La plupart des auteurs ont proposé des approches d'estimation de l'exposant de Hurst invariant dans le temps [21], [47] et [6]. Beaucoup d'études ayant abordé l'efficience du marché avec l'exposant de Hurst ont porté sur le Hurst statique. Cependant, les faits stylisés montrent l'existence de cas où celui-ci varie dans le temps. C'est le cas par exemple des marchés financiers où les fluctuations des prix sont tels que l'efficience du marché peut évoluer sur une période considérée. On peut y observer une alternance entre des périodes d'efficience et d'inefficience. En effet, les faits stylisés ont montré que les marchés financiers peuvent être confrontés à des faits pouvant impacter l'évolution des cours. La recrudescence ou fréquence actuelle des crises financières font que les cours fluctuent dans un continuum d'équilibre et de déséquilibre. Dès lors il serait intéressant de revoir la problématique de l'efficience en l'abondant dans un autre aspect. Notamment, en analysant l'efficience du marché tout en prenant en compte son évolution dans le temps. D'où l'utilisation du Hurst dynamique qui permet de modéliser l'efficience des marchés variant dans le temps.

Pour tenir compte de tels phénomènes des auteurs tels que [52], [16], [7] et [50] ont proposé d'utiliser l'approche dynamique qui semble plus appropriée. Cette approche prend en compte la régularité ponctuelle avec la possibilité de changer de manière significative au fil du temps. [8] ont utilisé l'exposant de Hurst variant dans le temps pour tester l'efficience des pays émergents d'Amérique latine et d'Asie. Leurs principaux résultats montrent que la plupart des marchés étudiés deviennent plus efficaces au fil du temps. [44] a également utilisé la même approche sur douze séries d'indices des bourses développées. Il a constaté que la valeur de l'exposant de Hurst pour l'ensemble de la série complète était d'environ 0.5 ce qui confirme l'efficience du marché. Par contre, pour des sous-échantillons de cette même base de données, il trouve que la valeur du coefficient varie fortement. [52] ont étudié le comportement des marchés financiers des pays de l'union européenne (UE) durant des périodes de crises. Leur étude a révélé l'existence d'effets négatifs sur l'ensemble des marchés boursiers de l'UE pendant la crise financière mondiale de 2008, cependant la crise de la dette souveraine de la zone euro n'a eu d'effets négatifs significatifs que sur les marchés Français, Espagnol et Grec. L'exposant de Hurst dynamique semble donc être plus adéquat pour étudier l'efficience des marchés durant des périodes de crises par exemple (pour plus de détails cf. [7]).

4. Données et résultats empiriques

La sphère financière prend de plus en plus d'importance en Afrique. Nous assistons à un boom des marchés boursiers africains; nous sommes passés d'une dizaine de bourses dans les années 90 à 28 bourses ces dernières décennies (source : African Securities Exchange Association 2017). Ainsi, l'étude empirique menée dans ce travail porte sur un échantillon de données constitué des principaux indices boursiers africains. La fréquence des données est quotidienne puisque si l'hypothèse d'efficience est rejetée sur des données journalières, elle devrait aussi l'être sur des données hebdomadaires, mensuelles [28] et [4].

4.1. Description de la base

Les données sont extraites des sites de la BRVM (<http://www.brvm.org>) et de ilboursa (<http://www.ilboursa.com>). Les principaux indices sont : BRVM10 (BRVM), EGX30 (Égypte), GSE (Ghana), MADEX (Maroc), NGSE (Nigeria), NSE20 (Kenya), TOP40 (Afrique du Sud), TUNINDEX (Tunisie).

La figure 1 présente l'évolution des cours boursiers Africains.

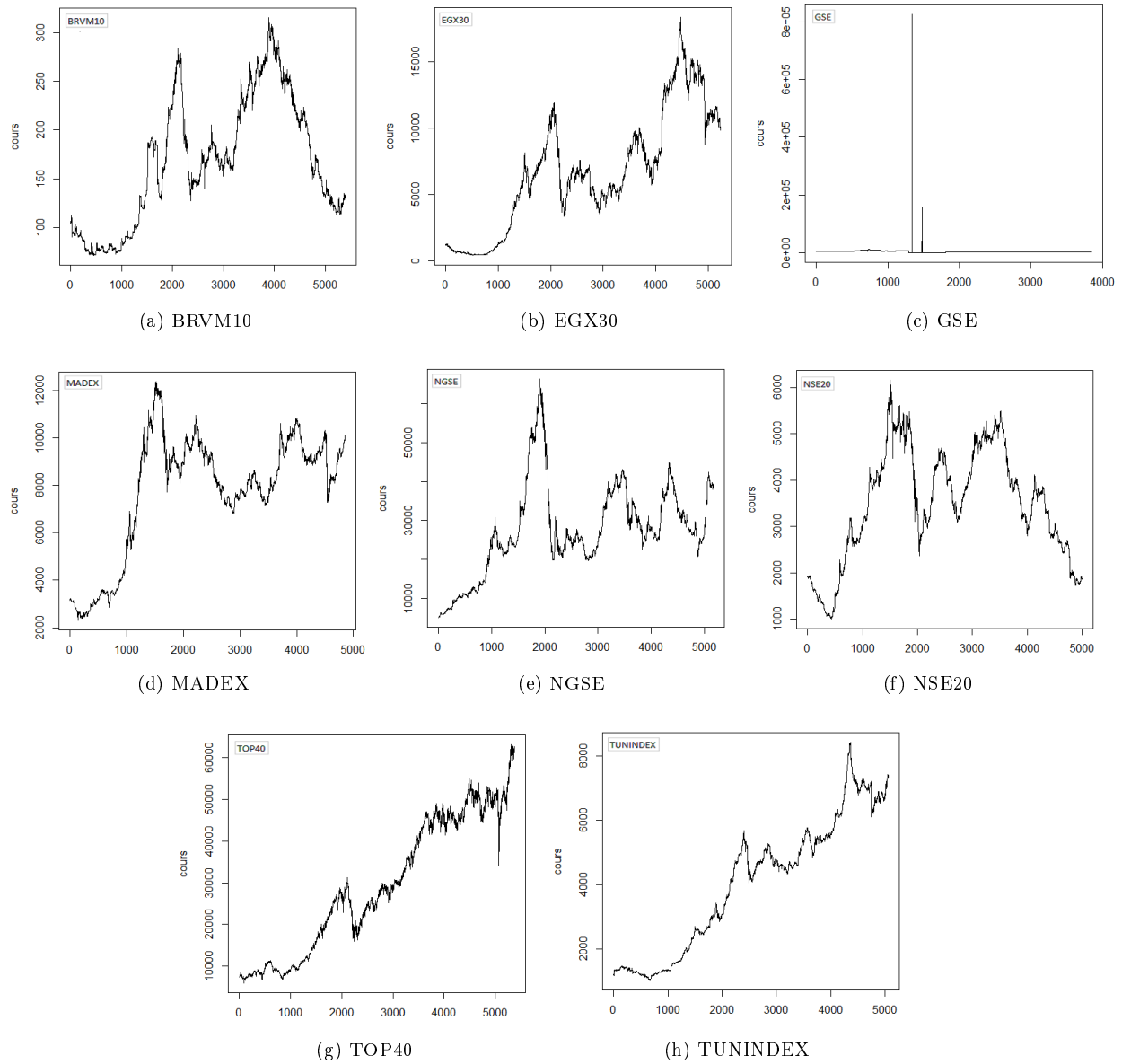


FIGURE 1 – Indice boursiers Africains (source : auteurs)

Notes : le rendement d'un indice est égal à la différence première de cet indice. DBRVM10, DEG X30, DGSE, DMADEX, DNGSE, DNSE20, DTOP40 et DTUNINDEX représentent respectivement les rendements de l'indice BRVM10, de l'indice EGX30, de l'indice GSE du Ghana, de l'indice MADEX, de l'indice NGSE, de l'indice NSE20, de l'indice TOP40 et enfin de l'indice TUNINDEX.

La figure 2 présente l'évolution des différentes séries de rentabilités des bourses africaines. Cette figure montre que les rendements sont stationnaires, ils tournent autour de zéro.

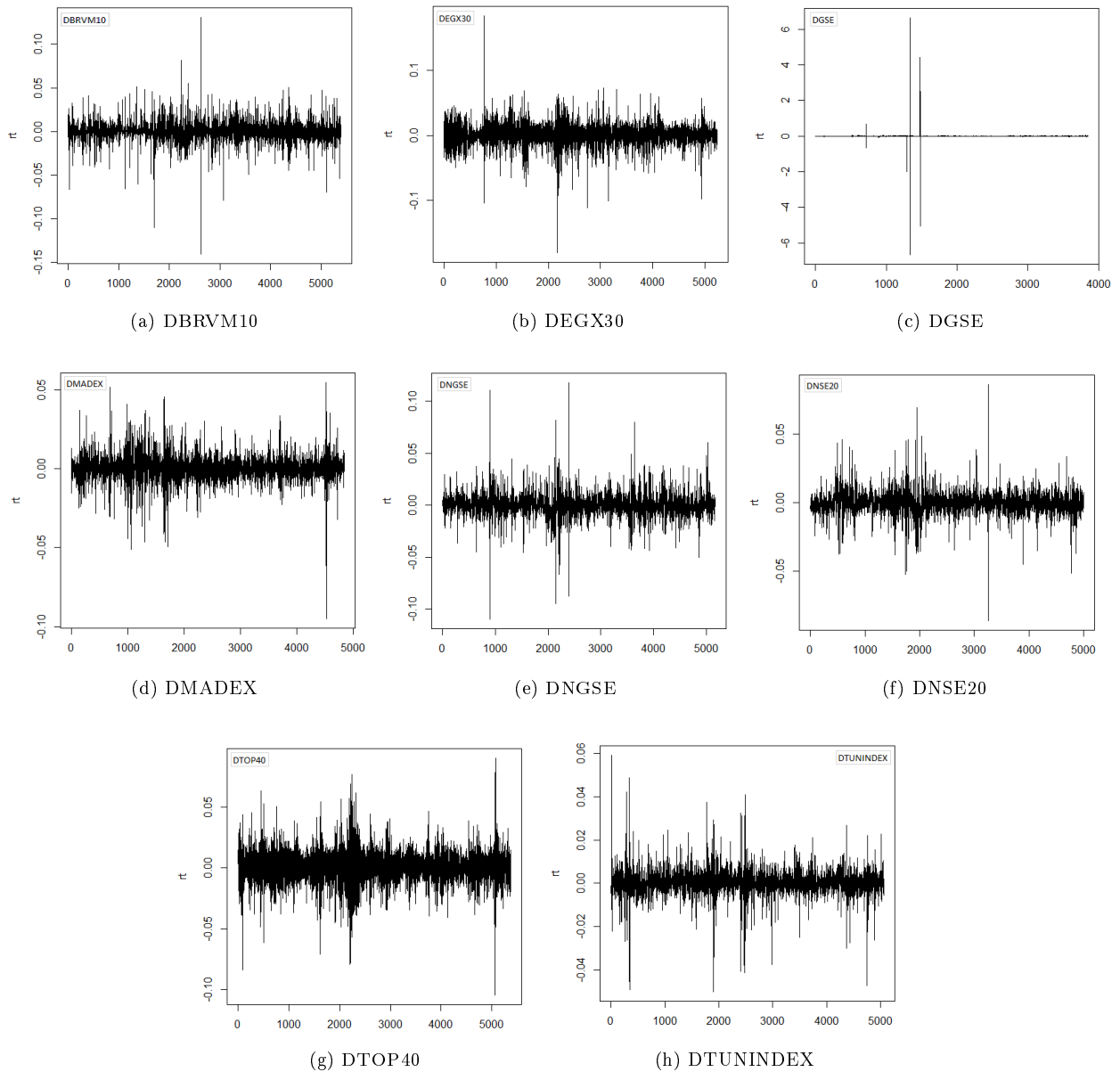


FIGURE 2 – Rendements boursiers Africains (source : auteurs)

Le tableau 1 présente les propriétés statistiques. Les rendements sont majoritairement négativement asymétriques ($S < 0$) ; les acteurs subissent fréquemment de petites pertes avec des chances moindres de gains excessifs. Pour le kurtosis, toutes les séries sont leptokurtiques ($K > 3$), la probabilité de pertes ou de gains importants est plus grande que ce à quoi on pourrait s'attendre si les rendements correspondaient à une courbe normale. Les tests de normalité (JB et KS) rejettent l'hypothèse nulle de normalité.

Series	DBRVM10	DEGX30	DGSE	DMADEX	DNGSE	DNSE20	DTOP40	DTUNINDEX
Mean	0.0003	0.0003	-0.0002	0.0002	0.0003	0.0000	0.0003	0.0003
Min.	-0.1403	-0.1799	-6.6528	-0.0947	-0.1094	-0.0860	-0.1045	-0.0500
Max.	0.1306	0.1837	6.6409	0.0545	0.1176	0.0863	0.0906	0.0591
Std	0.0104	0.0165	0.1900	0.0082	0.0108	0.0083	0.0132	0.0057
Skew.	-0.3144	-0.4201	-1.9958	-0.5773	0.2053	0.2627	-0.2073	-0.2817
Kur.	18.4834	8.9073	984.5776	10.4079	12.0970	11.3736	4.8107	14.6001
JB	76857	17470	NA	22160	31554	26996	5219.6	45018
KS	0.1153	0.0686	NA	0.0851	0.0886	0.0786	0.0525	0.0893

TABLE 1 – Statistiques descriptives des rendements (source : auteurs)

4.2. Résultats obtenus

4.2.1. Estimation de l'exposant de Hurst

Les résultats du tableau 2 montrent que l'indice généralisé $H(q)$ varie en fonction du q , ils indiquent donc une structure multifractale des marchés frontières Africains.

series q	DBRVM10	DEGX30	DGSE	DMADEX	DNGSE	DNSE20	DTOP40	DTUNINDEX
-5	0.62	0.53	0.81	0.41	0.50	0.76	0.35	0.48
-4	0.59	0.52	0.75	0.41	0.49	0.74	0.33	0.48
-3	0.55	0.49	0.65	0.41	0.48	0.70	0.31	0.47
-2	0.49	0.46	0.57	0.40	0.45	0.56	0.30	0.45
-1	0.43	0.42	0.63	0.39	0.41	0.29	0.30	0.43
-0.5	0.40	0.40	0.74	0.38	0.38	0.35	0.29	0.42
0	0.38	0.37	1.04	0.35	0.35	0.38	0.29	0.40
0.5	0.36	0.34	1.07	0.32	0.32	0.35	0.28	0.37
1	0.34	0.31	0.27	0.28	0.28	0.31	0.26	0.34
2	0.27	0.23	0.04	0.18	0.21	0.20	0.19	0.24
3	0.15	0.15	0.02	0.08	0.15	0.12	0.11	0.14
4	0.05	0.09	0.01	0.01	0.09	0.08	0.05	0.07
5	0.01	0.04	0	0	0.05	0.06	0.01	0.03

TABLE 2 – Estimation de l'exposant de Hurst (source : auteurs)

4.2.2. Impact des crises subprimes et covid-19 sur l'efficience des marchés frontières Africains

Les économies d'Afrique subsaharienne sont généralement considérées comme très vulnérables aux chocs externes. Ces économies, particulièrement celles de l'UEMOA sont quasiment basées sur l'exportation de matières premières dont les prix dépendent de la conjoncture internationale [3]. Elles seront donc inéluctablement impactées par des crises internationales. Par contre, [17] considèrent que l'absence ou la faible intégration de ces marchés au reste du monde constitue plutôt un avantage du fait qu'ils sont peu impactés par les crises provenant des marchés développés. [45] abondent dans le même sens pour eux le faible niveau des transactions au sein des marchés Africains peut les épargner lors des crises. Face à cette divergence, étudier l'impact de tels phénomènes ou événements sur l'efficience de ces marchés Africains semblent pertinents. Ainsi, nous étudions l'impact des deux crises majeures de ces dernières décennies

sur l'efficience des bourses frontières Africaines, à savoir la crise des subprimes et la covid-19. La crise des subprimes est survenue en juillet 2007 et a connu deux phases : une première phase où elle était uniquement circonscrite aux États-Unis et dans quelques pays développés qui avaient des liens très forts avec le marché boursier Américain et une deuxième phase dans laquelle elle s'est propagée sur les autres places boursières du monde entier. La covid-19 est quant à elle une crise sanitaire naît en Chine à la fin de l'année 2019. Elle est devenue une pandémie mondiale qui a touché le monde entier et sur tous les plans.

4.2.2.1 Hurst classique

Le tableau 3 présente l'estimation de l'exposant de Hurst classique durant la crise des subprimes¹ ; nous constatons que seuls les indices (MADEX, NSE20 et TUNINDEX) ont connu une période d'efficience, tous les autres indices africains rejettent l'hypothèse nulle d'absence de mémoire sur toute la période d'étude.

T_{sub} \ series	DBRVM10	DEGX30	DGSE	DMADEX	DNGSE	DNSE20	DTOP40	DTUNINDEX
T_{sub_0}	1.98 **	1.71 *	10.48 ***	1.68 *	2.22 **	4.09 ***	5.46 ***	3.54 ***
T_{sub_1}	2.37 ***	3.55 ***	3.67 ***	2.37 **	2.49 **	4.33 ***	5.64 ***	0.62
T_{sub_2}	3.17 ***	3.52 ***	1.87 *	1.30	1.72 *	0.73	5.12 ***	1.90 *

Notes : (*), (**) et (***) sont respectivement les seuils de 10%, 5% et 1%.

TABLE 3 – Crise des subprimes : Hurst classique (source : auteurs)

Le tableau 4 présente l'estimation de l'exposant de Hurst classique pendant la covid-19² ; l'essentiel des indices fait ressortir un exposant de Hurst majoritairement $\neq 1/2$ indiquant ainsi le rejet de H_0 sauf pour les indices (GSE, MADEX et TUNINDEX) qui ont connu l'efficience durant la deuxième phase de la covid-19.

T_{cov} \ series	DBRVM10	DEGX30	DGSE	DMADEX	DNGSE	DNSE20	DTOP40	DTUNINDEX
T_{cov_1}	3.57 ***	3.49 ***	5.61 ***	4.87 ***	3.01 ***	3.84 ***	1.88 *	2.29 **
T_{cov_2}	2.08 **	2.47 **	1.32	0.28	2.76 ***	2.89 ***	2.08 **	0.08

TABLE 4 – Crise des subprimes : Hurst classique (source : auteurs)

1. Pour analyser l'impact de la crise des subprimes sur l'efficience des bourses frontières Africaines, nous avons scindé les données en trois périodes : (sub₀), (sub₁) et (sub₂). Une première période (sub₀) correspondant à la période précédant la crise, (sub₁) est la deuxième phase de la crise, période pendant laquelle la crise était uniquement circonscrite aux États-Unis et dans quelques pays développés très intégrés avec le marché boursier américain. Et la troisième phase (sub₂) durant laquelle la crise s'est propagée au reste du monde.

2. Pour analyser l'impact de la covid-19 sur l'efficience des bourses Africaines, nous avons scindé les données en 2 périodes avant la crise et pendant la crise.

Les résultats semblent un peu divergents selon le marché. Nous avons là un problème binaire, soit le marché est efficient, soit il n'est pas efficient. Or, dans la réalité, le monde financier a fait face à de nombreux épisodes de crises ou krachs boursiers qui conduisent les marchés financiers à des périodes d'instabilité. Ce qui introduit l'utilisation de la deuxième méthode pour tester l'impact de ces deux crises sur l'efficience des bourses africaines, à savoir l'exposant de Hurst dynamique.

4.2.2.2 Hurst dynamique

La figure 3 présente l'exposant de Hurst variant dans le temps des indices boursiers africains pendant la crise des subprimes. La majorité des indices a été impactée dès la 1^{ère} phase (nous passons d'une persistance à une anti-persistance et inversement). Certains indices connaissent des périodes où une inefficience significative peut durer sur de très longues périodes, c'est le cas notamment de la BRVM10 et du NSE20. Même si tous les indices n'ont pas été impactés de la même manière ou que certains indices aient pris plus de temps que d'autres, finalement ils ont tous été affectés et montrent une alternance entre des phases d'efficience et d'inefficience (sauf le Nigéria).

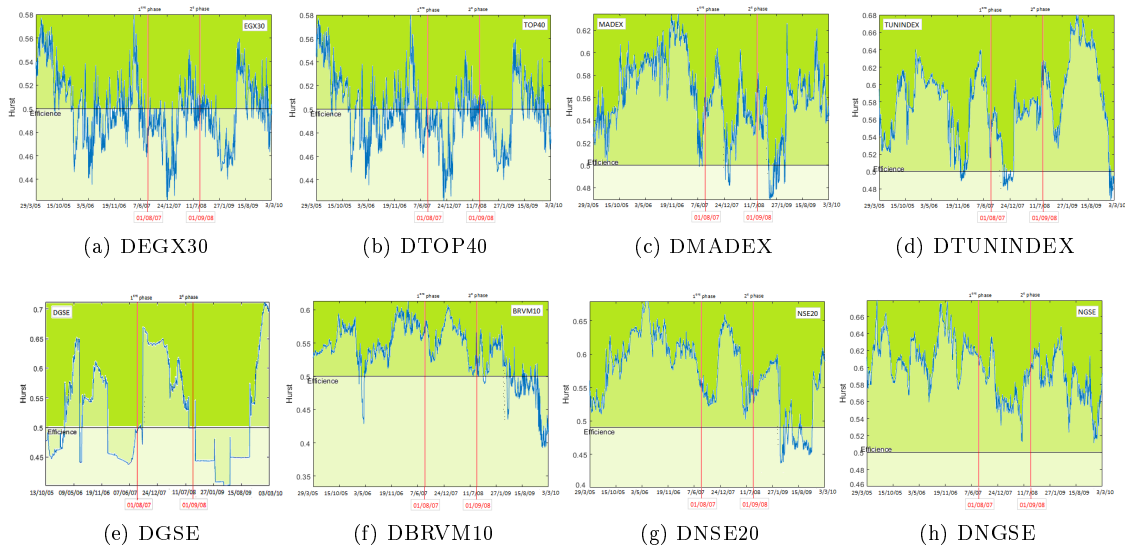


FIGURE 3 – impact de la crise des subprimes sur l'efficience des bourses Africaines (source : auteurs)

La figure 4 présente l'exposant de Hurst variant dans le temps des indices Africains pendant la crise de la covid-19. Avant la crise qui commence en février ou mars selon les régions, nous constatons que l'exposant de Hurst est significativement $\neq 1/2$ pour l'essentiel des indices, ainsi nous pouvons rejeter H_0 . Par contre, nous constatons après la crise une alternance entre des périodes d'efficience et d'inefficience et inversement ; les indices (EGX30 et TOP40) ont été les plus instables (alternance à des vitesses très rapides). Aussi, nous remarquons des indices comme GSE qui n'ont connu qu'une petite période d'efficience juste avant la crise et des indices comme NGSE et NSE20 qui n'ont jamais été efficaces sur toute la période de l'étude.

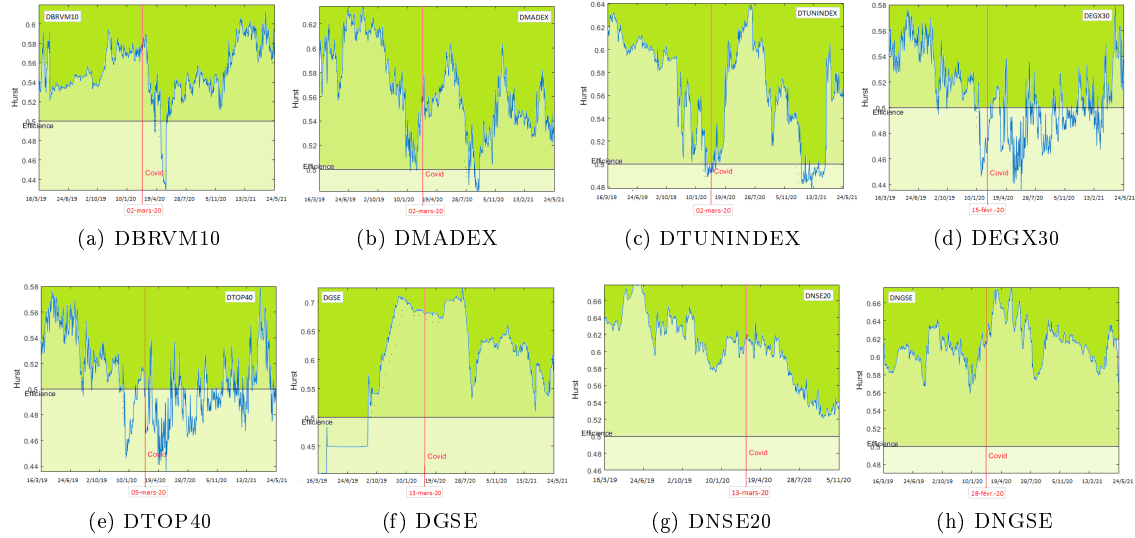


FIGURE 4 – impact de la covid-19 sur l’efficience des bourses Africaines (source : auteurs)

4.3. Discussions

Ce papier teste dans un premier temps l’hypothèse d’efficience faible des bourses frontières Africaines à travers leurs différents indices. Cette analyse s’est fait à partir de l’exposant de Hurst généralisé ($H(q)$). Les résultats de cette analyse mettent en évidence le caractère multifractal des bourses frontières Africaines. Les processus multifractals stipulent que les fluctuations ne sont pas entièrement caractérisées par un exposant fractal unique. Ces processus supposent donc une structure corrélacionnelle hétérogène au cours du temps, c’est-à-dire que la force de corrélacions entre valeurs successives peut varier dans le temps. Autrement dit, les séries alternent ainsi entre des phases de fortes corrélacions et des phases plus faiblement corrélées³. Aussi, l’économie mondiale, particulièrement les marchés financiers, ont connu de grandes périodes de crise, conduisant à de très fortes volatilités. Nous assistons depuis quelques décennies à une recrudescence des crises. La fréquence actuelle de ces crises et leurs conséquences ont montré que les cours boursiers fluctuent dans un continuum d’équilibre et de déséquilibre. Ainsi, étudier le comportement des bourses pendant de telles périodes semblait pertinent. À ce titre, nous avons étudié dans un second temps l’impact des deux crises majeures de ces dernières décennies sur l’efficience des bourses frontières Africaines. Il s’agit notamment de la crise des subprimes et de la covid-19 qui sont des événements majeurs ayant secoué le monde, particulièrement le système financier. Dans cette analyse, nous avons utilisé deux approches, à savoir l’approche Hurst classique et l’approche Hurst dynamique. Les résultats peuvent être résumés comme suit : s’agissant du Hurst classique, les résultats semblent un peu divergents selon les indices. L’essentiel des indices rejette l’hypothèse nulle d’absence de mémoire (processus tantôt persistant tantôt anti-persistant) ; il existe donc une mémoire dans les séries de rentabilités. Un système qui présente des statistiques du type Hurst est le résultat d’une longue chaîne d’événements interconnectés dans laquelle les événements d’aujourd’hui influencent les événements futurs cf [37]. Or, sur un marché efficient, les variations des cours doivent être imprévisibles dans la mesure où tous les événements

3. Cette conclusion est conforme à la majorité des résultats généralement obtenus sur de telles séries.

connus et anticipés sont déjà reflétés dans le cours actuel. Ce qui impliquerait une absence de corrélation sérielle des rentabilités boursières qui conduirait à une impossibilité de prévoir les rentabilités futures à partir des rentabilités passées. En effet, la théorie d'efficience du marché suppose que le prix observé reflète pleinement toute l'information disponible et intègre également les conséquences des événements passés de manière instantanée. La limite de cette méthode est que nous avons là un problème binaire, soit le marché est efficient, soit il n'est pas efficient. Or, dans la réalité, le monde financier a fait face à de nombreux épisodes de crises ou krachs boursiers qui conduisent les marchés financiers à des périodes d'instabilité. Ce qui introduit l'utilisation de la deuxième méthode pour tester l'impact de ces deux crises sur l'efficience des bourses Africaines, à savoir l'exposant de Hurst dynamique. Les résultats de cette analyse montrent que l'essentiel des bourses frontalières Africaines alterne entre des périodes d'efficience et des périodes d'inefficience (à l'exception du Nigeria et du Kenya). Aussi, il est important de signaler que même si toutes les bourses Africaines n'ont pas été impactées de la même manière (temps de réaction différent) ; finalement, elles ont toutes été impactées soit directement et immédiatement, soit par un effet de contagion. Ceci à travers divers canaux de transmission comme le canal commercial, le canal financier, le comportement des investisseurs internationaux, les investissements directs étrangers (IDE)...

5. Conclusion

Avec le développement fulgurant de la sphère financière Africaine, le regard se porte de plus en plus sur ces marchés généralement émergents ou frontalières perçus comme la « prochaine génération » des marchés émergents avec un fort potentiel de génération de rendements attractifs à long terme. Ces bourses constituent aujourd'hui des sources de financement pour l'économie moderne, dès lors étudier leurs comportements devient une nécessité pour les différents acteurs et intervenants de ces marchés. En effet, pour bien jouer leur rôle de leviers et d'appuis aux États et entreprises dont la recherche de fonds pour le déroulement des activités et le financement des investissements constituent des enjeux importants, il serait donc pertinent d'étudier l'efficience de ces bourses. L'analyse de l'efficience des bourses frontalières Africaines a révélé un certain nombre d'observations, à savoir le caractère multifractal des bourses Africaines et l'existence d'une mémoire pour l'essentiel des séries de rentabilités. Ce résultat semble être contradictoire avec la théorie d'efficience qui stipule que les prix évoluent de façon aléatoire de sorte que l'on ne puisse se baser sur une corrélation sérielle des rendements passés pour prédire les rendements futurs. Toutefois, il est important de signaler que cela n'entraîne pas forcément l'inefficience du marché ; la relation entre marche aléatoire et efficience de marché n'est pas une équivalence. Par rapport à l'impact des deux crises majeures (subprimes et covid-19) sur l'efficience des bourses Africaines, nous avons les conclusions suivantes. Les résultats montrent que les bourses frontalières Africaines n'ont pas été impacté de la même manière par les deux crises. Ceci en raison du fait que la covid-19 est une crise sanitaire devenue une pandémie mondiale qui a touché le monde entier pratiquement au même moment, alors que la crise des subprimes a débuté aux États-Unis et a pris du temps avant de se propager au reste du monde. À cela s'ajoute, la petite taille des bourses Africaines (marchés embryonnaires) qui pourrait entraîner des disparités sectorielles ainsi, tous les secteurs ou marchés ne sont pas affectés de la même façon. Toutefois, même si ces deux crises ont impacté les bourses Africaines de façon différente, il apparaît clairement qu'elles les ont toutes les deux affectés soit directement ou indirectement par effet de contagion à travers différentes méthodes de transmission. Si la méthode classique montre majoritairement l'existence des

statistiques du type Hurst se qui traduit une longue chaîne d'événements interconnectés dans laquelle les événements d'aujourd'hui influencent les événements futurs. Pour ce qu'il est de l'approche dynamique, nous observons le même comportement sur l'essentiel des bourses Africaines, elles alternent toutes entre des périodes d'efficacité et des périodes d'inefficacité (à l'exception du Nigeria et du Kenya).

References

- [1] Abry,P., Veitch,A.,1998 "Wavelet Analysis of Long-Range-Dependent Traffic". IEFÉ TRANSACTIONS ON INFORMATION THEORY, VOL. 44, NO. 1, JANUARY 1998.
- [2] Ahmad,Z., Hussain,S., 2001 "KLSE Long Run Overreaction and the Chinese New Year Effect", Journal of Business Finance and Accounting, 28(1), (2),pp. 63–105
- [3] Aka,B.E., 2009 "LA CRISE DES « SUBPRIME » AUX ETATS-UNIS ET LES ECONOMIES DES PAYS DE L'UEMOA : UNE EVALUATION ECONOMETRIQUE A PARTIR DE LA BRVM*", Cellule d'Analyse de Politiques Economiques du CIRES (CAPEC) Année de publication : Mai 2009.
- [4] Alexander,S., Erthur,K.C., 1994 "Impact de l'intervalle d'échantillonnage sur les tests d'efficacité : application au marché français des actions". Finance, Vol. 15, pp. 7-27.
- [5] Alwathainani,A.M., 2012 "Consistent winners and losers". International Review of Economics and Finance, 21, pp. 210–220.
- [6] Bianchi,S., 2005 "Pathwise identification of the memory function of the multifractional brownian motion with application to finance." Int J Theor Appl Finance 2005 ;8(2) :255–81 .
- [7] Bianchi,S., Pianese,A., 2018 "Time-varying Hurst–Hölder exponents and the dynamics of (in)efficiency in stock markets."Elsevier <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2018.02.015> 0960-0779.
- [8] Cajueiro,D.O., Tabak,B.M., 2004 "The Hurst exponent over time : Testing the assertion that emerging markets are becoming more efficient." Physica A : Statistical Mechanics and Its Applications, 336(3–4), 521–537. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2003.12.031>
- [9] Ciuciu,P., Abry,P., Rabrait,C., and Wendt,M., 2008 "Log wavelet Leaders cumulant based multifractal analysis of EVI fMRI time series : evidence of scaling in ongoing and evoked brain activity" IEEE SELECTED TOPICS ON SIGNAL PROCESSING, VOL. X, NO. XX, DECEMBER 2008
- [10] Clements,A., Drew,M.E., Reedman,E.M., Veeraraghavan,M., 2009 "The death of the overreaction anomaly ? A multifactor explanation of the contrarian returns". Investment Management and Financial Innovations, 6, 1, pp. 76–85.
- [11] Conrad J., Kaul G., (1988), "Time-Variation in Expected Returns". Journal of Business, 56, pp. 409–425.
- [12] Diallo,O.K., Mendy,P., 2019 "Wavelet Leader and Multifractal Detrended Fluctuation Analysis of Market Efficiency :Evidence from WAEMU Market Index" World Journal of Applied Economics (2019), 5(1) : 1-5 doi : 10.22440/wjae.4.1.xx Research Article
- [13] Diallo,O.K., Mendy,P., Burlea-Schiopoiub,A., 2021 "A method to test weak-form market efficiency from sectoral indices of the WAEMU stock exchange : A wavelet analysis" Heliyon 6(2021)e05858 CellPress
- [14] Fama,E., 1965 "The behavior of stock market prices". Journal of Business, vol. 38, no1 (Jan., 1965), pp. 34-105.
- [15] Fama,E., French,K.R., 1988a "Permanent and temporary components of stock prices". Journal of Political Economy, vol. 96, n^o 2, p. 246-273.
- [16] Garcin,M., 2016 "Estimation of time-dependent Hurst exponents with variational smoothing and application to forecasting foreign exchange rates", <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01399570>
- [17] Gourene,G.A.Z., MENDY,P., DIOMANDE,L., "Beginning an African Stock Markets Integration ? A Wavelet Analysis" Journal of Economic Integration Vol. 34, No. 2, June 2019, 370-394
- [18] Granger,C.W.J., and Joyeux,R., 1980 "An introduction to long-memory time series models and fractional differencing." Journal of Time Series Analysis 1, 15-29.
- [19] Grossman,A., Morlet,J., 1984 "SIAM (Soc. Ind. Appl. Math.) J". Math. Anal,15(4), 273.
- [20] Grossman,S.J., Stiglitz,J.E., 1980 "On the impossibility of informationally efficient markets". American Economic Review,vol. 70, n^o 3, p. 393-408.
- [21] Higuchi,T., 1988 "Approach to an irregular time series on the basis of the fractal theory." Physica D 1988 ;31 :277–83.
- [22] Hosking,J.R.M., 1981 "Fractional differencing", Biometrika. 68, 165-176.

- [23] Hurst,H.E., 1951 "Long-term storage capacity of reservoirs." Transactions of the American Society of Civil Engineers, 116 :770–799, 1951.
- [24] Jaffard,S., Lashermes,B., Abry,P.,2005 "Wavelet Leader based Multifractal Analysis".In Proc. of the Int. Conf. on Acoust. Speech and Sig. Proc., 2005.
- [25] Jaffard,S., Lashermes,B., Abry,P., "Wavelet Leaders in Multifractal Analysis", in Wavelet Analysis and Applications,T Qian, M. I; Vai, X. Yuesheng, Eds., Basel, Switzerland, 2006, pp. 219–264, Birkhäuser Verlag.
- [26] Jensen, M.C., 1978 "Some Anomalous evidence regarding market efficiency". The Journal of Finance, 6(2-3),95-101(1978).
- [27] Kadiyala,P., Rau,R., (2004), "Investor reaction to corporate event announcements : underreaction or overreaction". Journal of Business, 77, pp. 357–386.
- [28] Kendall,M.G., 1953 "The Analysis of Economic Time-Series-Part I : Prices". Journal of the Royal Statistical Society, 96, pp. 11–25; reprinted in P. Cootner, (ed.) (1964), The Random Character of Stock Market Prices, Cambridge, MA : MIT Press
- [29] Khamis,A.Y., Walid,M., Seong-Min, Y.,2018 "Efficiency, multifractality, and the long-memory property of the Bitcoin market : A comparative analysis with stock, currency,and gold markets". Finance Research Letters (2018), doi :10.1016/j.frl.2018.03.017.
- [30] Lahmiri,S., 2017 "Multifractal analysis of Moroccan family business stock returns". Physica A486, 183–191
- [31] Lo,A.W., 1991 "Long-Term Memory in Stock Market Prices", Econometrica, Vol. 59, no5, pp. 1279-1313.
- [32] Lo,A.W., 1997 A Non Random Walk Down Wall Street. In D. Jerison, I. M. Singer, and D. W. Stroock (Eds.), Proceedings of symposia in pure mathematics (pp. 149-183).
- [33] Malkiel,B.G., 2003 "The efficient market hypothesis and its critics "Journal of Economic Perspectives, vol. 17, n^o 1, p. 59-82.
- [34] Mallat,S., 1999 "A Wavelet Tour of Signal Processing". San Diego, CA : Academic, 1999
- [35] Mandelbrot, B., 1963 (Reprinted in Cootner 1964, Mandelbrot(1977) and several collections of papers on finance) The journal of Business, 36 394-419, 1963. 44.
- [36] Mandelbrot,B., 1971a "When Can Price Be Arbitraged Efficiently ? A Limit to the Validity of the Random Walk and Martingale Models", The Review of Economics and Statistics, Vol. 53 no1, pp, 225-236.
- [37] Mandelbrot,B., Taqqu,M.S., 1979 "Robust R/S analysis of long-run serial correlation." Bull. Int. Stat. Inst.48(2), 69–104.
- [38] Mandelbrot,B., Ness,J.V., 1968 "Fractional brownian motion, fractional noises and application". SIAM Review, 10 :422–437, 1968.
- [39] Mandelbrot,B., Wallis,J., 1968 "Noah, Joseph and Operational Hydrology" Water Resources Research, Vol.4, no5, pp. 909–918.
- [40] Mandelbrot,B., Wallis,J., 1969a "Computer, Experiments with Fractional Gaussian Noises. Part I, Averages and Variances" Water Resources Research, Vol.5, no1, pp. 228–241.
- [41] Mandelbrot,B., Wallis,J., 1969b "Computer, Experiments with Fractional Gaussian Noises. Part II, Rescaled Range and Spectra" Water Resources Research, Vol.5, no1, pp. 242–259.
- [42] Mandelbrot,B., Wallis,J., 1969c "Computer, Experiments with Fractional Gaussian Noises. Part III, Mathematical Appendix" Water Resources Research, Vol.5, no1, pp. 260–267.
- [43] Mignon,V., 1995 "Structure de dépendance des taux de change", Actes du Colloque de l'AEA des 16 et 17 mars 1995, Haigerloch (Allemagne) et Working Paper MODEM no95-03, Université Paris X-Nanterre.
- [44] Mitra,S.K., 2012. "Is Hurst exponent value useful in forecasting financial time series?" Asian Social Science, 8(8), 111–120. <https://doi.org/10.5539/ass.v8n8p111>
- [45] Nawazish,M., Naqvib,B., Rahata,B., et Abbas,R.S.K., 2020. "Price reaction, volatility timing and funds' performance during Covid-19". Finance Research Letters.
- [46] Osborne,M.F.M., 1959 "Brownian Motion in the Stock Market".Operations Research, 7(2), 145-173.
- [47] Peltier,R., Lévy,V.J., 1994 "A new method for estimating the parameter of fractional brownian motion." Rapport de recherche INRIA 2396, Programme 4 (Robotique, Image et Vision - Action Fractales), 1-27 1994 .
- [48] Pesaran,M.H., Timmerman,A., 1995 "Predictability of Stock Returns : Robustness and Economic Significance", Journal of Finance, 50(4), pp. 1201–28
- [49] Peters,E., 1991 Chaos and Order in the Capital Markets. Wiley, New Yory.
- [50] Pianese,A., Bianchi,S., Palazzo,A.M., 2018 "Fast and unbiased estimator of the time-dependent Hurst ex-

ponent" American Institute of Physics <https://doi.org/10.1063/1.5025318>

- [51] Poterba, J.M., Summers, L.H.,1988 "Mean reversion in stock prices : evidence and implications". *Journal of Financial Economics*, 22(1),27-59. doi :10.1016/0304-405X(88)90021-9.
- [52] Sensoy,A., Tabak,B.M., 2013 "How much random does European Union walk ? A time-varying long memory analysis " *Banco central do Brazil* ISSN 1518-3548 Décembre 2013
- [53] Shiller,R.J., (1981a), "Do stock prices move too much to be justified by subsequent changes in dividends?". *American Economic Review*, 71(3), 421-436
- [54] Shiller,R.J., (1981b), "The use of volatility measures in assessing market efficiency". *J.Finance* 36 (2), 291-304.
- [55] Shiller,R.J., (1988), "The volatility debate". *American Journal of Agricultural Economics* 70(5) : 1057-1063.
- [56] Summers, L.H.,1986 "Does the Stock Market Rationally Reflect Fundamental Values?". *The Journal of Finance*,41(3) 591-601. doi :10.2307/2328487 .
- [57] Vidakovic,B., (2009) "Statistical modeling by wavelets". John Wiley & Sons. (Vol. 503).